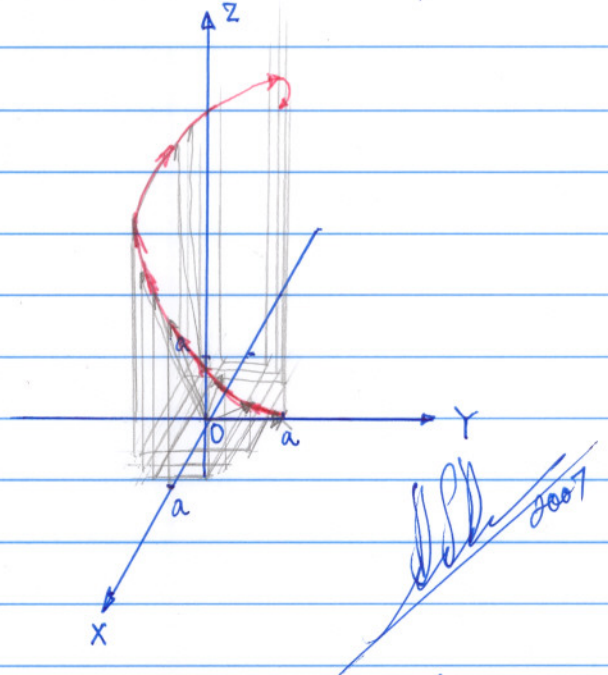


1. แสดงกราฟของโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ $\vec{r}(\theta) = a \sin \theta \vec{i} + a \cos \theta \vec{j} + \theta \vec{k}$ เมื่อ $\theta \geq 0, a > 0$ โดยสังเขป (25 คะแนน)

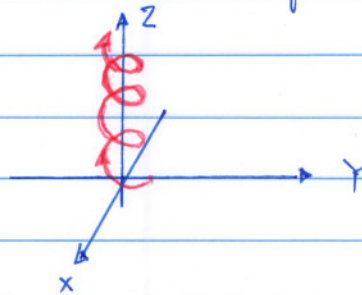
พิจารณาว่า $\vec{r}(\theta) = (a \sin \theta, a \cos \theta, \theta)$ ดังตารางต่อไปนี้

θ	$\vec{r}$
0	$(0, a, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{\pi}{6})$
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\pi}{4})$
$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{\pi}{3})$
$\frac{\pi}{2}$	$(a, 0, \frac{\pi}{2})$
$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{2\pi}{3})$
$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}a}{2}, -\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{3\pi}{4})$
$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{5\pi}{6})$
π	$(0, -a, \pi)$
$\frac{7\pi}{6}$	$(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{7\pi}{6})$
$\frac{5\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}a}{2}, -\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{5\pi}{4})$
$\frac{4\pi}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{4\pi}{3})$
$\frac{3\pi}{2}$	$(-a, 0, \frac{3\pi}{2})$
$\frac{5\pi}{6}$	$(-\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{5\pi}{6})$
$\frac{7\pi}{4}$	$(-\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{7\pi}{4})$
$\frac{11\pi}{6}$	$(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{11\pi}{6})$
2π	$(0, a, 2\pi)$

สร้างกราฟโดยสังเขปดังนี้ เมื่อ $\theta \geq 0, a > 0$



หรือ ZOOM OUT ได้ดังนี้ เมื่อ $a > 0, \theta \geq 0$



2. กำหนดให้ $\vec{r}(\theta) = \sqrt{3} \cos \theta \vec{i} + \sqrt{3} \sin \theta \vec{j} + \theta \vec{k}$ จงหา $\vec{T}, \vec{N}$ และ $\vec{B}$ (35 คะแนน)

พิจารณา $\vec{r}(\theta) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, \theta)$

หา $\vec{T}(\theta) = \frac{1}{\|\vec{r}'(\theta)\|} \vec{r}'(\theta)$ เมื่อ $\|\vec{r}'(\theta)\| \neq 0$

ซึ่ง $\vec{r}'(\theta) = (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, 1)$

หา $\|\vec{r}'(\theta)\| = \sqrt{3 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta + 1} = \sqrt{3(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 1}$
 $= \sqrt{3+1} = 2 \neq 0$

ดังนั้น $\vec{T}(\theta) = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, 1)$

หา $\vec{N}(\theta) = \frac{1}{\|\vec{T}'(\theta)\|} \vec{T}'(\theta)$ เมื่อ $\|\vec{T}'(\theta)\| \neq 0$

ซึ่ง $\vec{T}'(\theta) = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \cos \theta, -\sqrt{3} \sin \theta, 0)$

หา $\|\vec{T}'(\theta)\| = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{3(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

ดังนั้น $\vec{N}(\theta) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (-\sqrt{3} \cos \theta, -\sqrt{3} \sin \theta, 0) = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$

หา $\vec{B}(\theta) = \vec{T}(\theta) \times \vec{N}(\theta)$

$= \left(\frac{1}{2} (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, 1)\right) \times (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{3} \sin \theta & \sqrt{3} \cos \theta & 1 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2} (0 - (-\sin \theta), -\cos \theta - 0, +\sqrt{3} \sin^2 \theta - (-\sqrt{3} \cos^2 \theta))$

$= \frac{1}{2} (\sin \theta, -\cos \theta, \sqrt{3}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta))$

$= \frac{1}{2} (\sin \theta, -\cos \theta, \sqrt{3})$

11 คณศก 2 สัปดาห์ที่ 1
 ทดสอบ 2/2548 ตอน 1 ข้อ 4 ข้อ 1

3. กำหนดให้ $\vec{r}(t) = (e^t \sin t, \tan t, t^2 - 3t + 8)$ พบว่าค่าที่ได้ (K) และค่าที่ได้ (g)
 ที่ $t=0$ (30 คะแนน)

ตอบ $K(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$ เมื่อ $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$

นั่น: $g(t) = \frac{1}{K(t)}$ เมื่อ $K(t) \neq 0$

ซึ่ง $\vec{r}(t) = (e^t \sin t, \tan t, t^2 - 3t + 8)$
 $\vec{r}'(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t, \frac{1}{1+t^2}, 2t-3) = (e^t(\sin t + \cos t), (1+t^2)^{-1}, 2t-3)$

$\vec{r}''(t) = (e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t), (-1)(1+t^2)^{-2}(2t), 2)$
 $= (2e^t \cos t, \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, 2)$

ดังนั้น $K(0) = \frac{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|}{\|\vec{r}'(0)\|^3}$ เมื่อ $\|\vec{r}'(0)\| \neq 0$

นั่น $\vec{r}'(0) = (1, 1, -3)$, $\vec{r}''(0) = (2, 0, 2)$
 $\|\vec{r}'(0)\| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11} \neq 0$

$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2-0, -6-2, 0-2)$
 $= (2, -8, -2)$

ดังนั้น $\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\| = \sqrt{4+64+4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

นั่น $K(0) = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{11})^3} = \frac{6\sqrt{2}}{11\sqrt{11}} = \frac{6}{11} \sqrt{\frac{2}{11}}$

นั่น: $g(0) = \frac{11\sqrt{11}}{6\sqrt{2}} = \frac{11}{6} \sqrt{\frac{11}{2}}$

A. จงพิจารณา กรวยหน้า ที่กำหนดมาของกราฟ เมื่อเทียบกับ จุดหัว แทนหัว เหนือเส้นกราฟ $\theta = \frac{\pi}{2}$
 เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งในพิกัดขั้ววงกลม $r = 2 \cos 2\theta$ (25 ค.พ.น.น.)

พิจารณา กรวยหน้า ของกราฟ

ให้ $r = 0$ จ. ได้ $2 \cos 2\theta = 0$

$$2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \dots$$

พิจารณา กรวยหน้า เมื่อเทียบกับ แทนหัว $\theta = 0$ เพื่อหาจุดตัด $(r, -\theta)$ แทนหัวในสมการ

จ. ได้ว่า $r = 2 \cos 2(-\theta) = 2 \cos(-2\theta) = 2 \cos 2\theta$ สมการวงกลม

ดังนั้นกราฟสมการเมื่อเทียบกับ แทนหัว

พิจารณา กรวยหน้า เมื่อเทียบกับ เส้นกราฟ $\theta = \frac{\pi}{2}$ เพื่อหาจุดตัด $(r, \frac{\pi}{2}-\theta)$ แทนหัวในสมการ

จ. ได้ว่า $r = 2 \cos 2(\frac{\pi}{2}-\theta) = 2 \cos(\pi-2\theta) = 2 \cos(-2\theta) = 2 \cos 2\theta$ สมการวงกลม

ดังนั้นกราฟสมการ เมื่อเทียบกับ เส้นกราฟ $\theta = \frac{\pi}{2}$

พิจารณา กรวยหน้า เมื่อเทียบกับ จุดหัว เพื่อหาจุดตัด $(r, \frac{\pi}{2}+\theta)$ แทนหัวในสมการ

จ. ได้ว่า $r = 2 \cos 2(\frac{\pi}{2}+\theta) = 2 \cos(\pi+2\theta) = 2 \cos 2\theta$ สมการวงกลม

ดังนั้นกราฟสมการ เมื่อเทียบกับ จุดหัว

พิจารณา กรวยหน้า ดังนี้

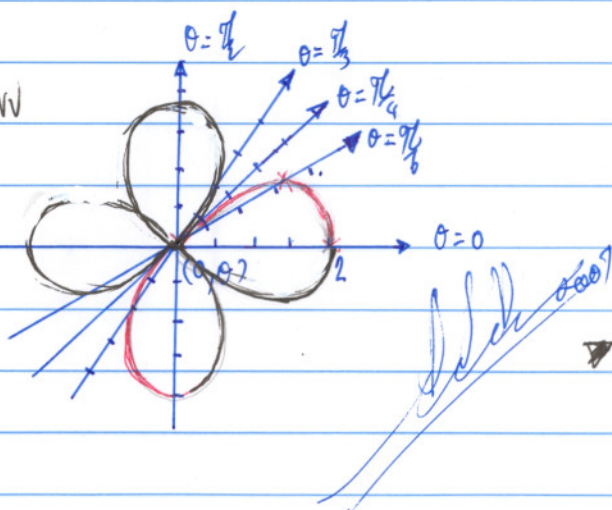
θ	r
0	2
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	-1
π	-2

แฉ: กรวยหน้า โดยส่วน

กราฟสมการวงกลม

เป็นกราฟ ROSE CURVE

ที่มี 4 loops



พฤศจิกายน 2 ปีที่แล้ว

กุมภาพันธ์ 2/2548 มอ.ที่ 1 แสดงให้ทำ

5. แสดงกราฟใน 3 มิติของผิวในระบบพิกัดฉากที่กำหนดโดยสมการ $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$
โดยพิจารณา จุดตัดบนแกนพิกัด รอยตัดบนระนาบพิกัด และระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด
พร้อมบอกชื่อของผิว (35 คะแนน)

จากสมการ $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$

พิจารณา จุดตัดบนแกนพิกัด

บนแกน x ให้ $y=0, z=0$ จะได้ $4x^2 = 36$

$$x = 3, -3$$

บนแกน y ให้ $x=0, z=0$ จะได้ $-9y^2 = 36$

$$y^2 = -4 \text{ ไม่มีค่า } y \in \mathbb{R} \text{ สอดคล้องกับสมการ}$$

ดังนั้นผิวไม่ตัดแกน y

บนแกน z ให้ $x=0, y=0$ จะได้ $z^2 = 36$

$$z = 6, -6$$

พิจารณา รอยตัดบนระนาบพิกัด และ ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด

บนระนาบ xy ให้ $z=0$ จะได้ $4x^2 - 9y^2 = 36$ มีกราฟไฮเพอร์โบลา

และบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy ให้ $z=z_0$ จะได้ $4x^2 - 9y^2 = 36 - z_0^2$ มีกราฟไฮเพอร์โบลา

บนระนาบ yz ให้ $x=0$ จะได้ $-9y^2 + z^2 = 36$ มีกราฟไฮเพอร์โบลา

และบนระนาบที่ขนานกับระนาบ yz ให้ $x=x_0$ จะได้ $-9y^2 + z^2 = 36 - 4x_0^2$ มีกราฟไฮเพอร์โบลา

บนระนาบ xz ให้ $y=0$ จะได้ $4x^2 + z^2 = 36$ มีกราฟวงรี

และบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xz ให้ $y=y_0$ จะได้ $4x^2 + z^2 = 36 + 9y_0^2$ มีกราฟวงรี

ดังนั้นผิวเป็น ELLIPTIC HYPERPOLOID OF ONE SHEET แสดงโดยสมการ

