

แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกรรม
ภาค 2/2548 ตอนที่ 1 หนึ่งวิทย์

6. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 4x^2y^2 + 2x^2 + 8y^2}{x^2 + 4y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 4k+3, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงพิจารณาว่าค่าคงที่ f ที่จุด $(0,0)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่ (25 คะแนน)

พิจารณาเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,0)$ ในทิศทางใดก็ได้ (x,y) ที่ใกล้ $(0,0)$ ตามแนวเส้นตรงที่มีค่า m
โดยกำหนดให้ $y-0 = m(x-0)$ หรือ $y = mx$ ซึ่ง x เข้าใกล้ 0 จะได้ว่า y เข้าใกล้ 0 ด้วย
ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 4x^2y^2 + 2x^2 + 8y^2}{x^2 + 4y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(x^2 + 4y^2) + 2(x^2 + 4y^2)}{x^2 + 4y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + 4y^2)(x^2 + 2)}{x^2 + 4y^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4(m^2x^2))(x^2 + 2)}{(x^2 + 4(m^2x^2))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + 4m^2)(x^2 + 2)}{x^2(1 + 4m^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 4m^2)(x^2 + 2)}{(1 + 4m^2)} = \frac{2(1 + 4m^2)}{(1 + 4m^2)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $1 + 4m^2 \neq 0$ ทุกค่าของ $m \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 2$

ผล: ฟังก์ชัน มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

ดังนั้น $2 = 4k+3$ จงหา $k = -\frac{1}{4}$



หาคงตัวที่ 2 สำหรับฟังก์ชัน

บทที่ 2/2548 มคอที่ 1 ภาควิชา

7. กำหนดให้ $f(x, y) = xy^3 + x^3 - 4xy + 5y - 6$ จงหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ โดยใช้กฎ

(300:1144)

หาค่าอนุพันธ์ $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ ถ้ามีค่าแน่นอน

จาก $f(x, y) = xy^3 + x^3 - 4xy + 5y - 6$

$$f(x+h, y) = (x+h)y^3 + (x+h)^3 - 4(x+h)y + 5y - 6$$

$$= xy^3 + hy^3 + x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4xy - 4hy + 5y - 6$$

$$f(x+h, y) - f(x, y) = hy^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4hy$$

$$= h(y^3 + 3x^2 + 3xh + h^2 - 4y)$$

ดังนั้น $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(y^3 + 3x^2 + 3xh + h^2 - 4y)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} y^3 + 3x^2 + 3xh + h^2 - 4y = y^3 + 3x^2 - 4y$$

และหาค่าอนุพันธ์ $f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$ ถ้ามีค่าแน่นอน

จาก $f(x, y) = xy^3 + x^3 - 4xy + 5y - 6$

$$f(x, y+k) = x(y+k)^3 + x^3 - 4x(y+k) + 5(y+k) - 6$$

$$= x(y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3) + x^3 - 4xy - 4xk + 5y + 5k - 6$$

$$= xy^3 + 3xy^2k + 3xyk^2 + xk^3 + x^3 - 4xy - 4xk + 5y + 5k - 6$$

$$f(x, y+k) - f(x, y) = 3xy^2k + 3xyk^2 + xk^3 - 4xk + 5k$$

$$= k(3xy^2 + 3xyk + xk^2 - 4x + 5)$$

ดังนั้น $f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k(3xy^2 + 3xyk + xk^2 - 4x + 5)}{k}$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} 3xy^2 + 3xyk + xk^2 - 4x + 5 = 3xy^2 - 4x + 5$$

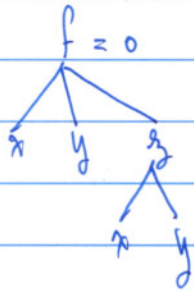
~~28/2/2548~~

ข้อ 2 คำนวณหาอนุพันธ์
 วันที่ 2/2548 มคอ. 1 ภาควิชาคณิตศาสตร์

8. จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ เมื่อ $\ln(x^2 y z) + \sin^2(x z) - x^3 e^{xy} = \sec(x^2 y) - 3$ (2548:1124)

สมมติให้ $f(x, y, z) = \ln(x^2 y z) + \sin^2(x z) - x^3 e^{xy} - \sec(x^2 y) + 3$

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน



ดังนั้น $f_x + f_z \frac{dz}{dx} = 0$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f_x}{f_z}$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \left(\frac{1}{x^2 y z}\right)(2xy z) + 2(\sin(xz))(\cos(xz))(z) \\ &\quad - (3x^2 e^{xy} + x^3 (e^{xy})(y)) \\ &\quad - (\sec(x^2 y))(\tan(x^2 y))(2xy) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{x} + z \sin(2xz) - e^{xy} (3x^2 + x^3 y) - 2xy \sec^2 y \tan x^2 y$$

$$\begin{aligned} f_z(x, y, z) &= \left(\frac{1}{x^2 y z}\right)(x^2 y) + 2(\sin(xz))(\cos(xz))(x) \\ &= \frac{1}{z} + x \sin(2xz) \end{aligned}$$

Handwritten signature

ดังนั้น $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x} \left(\frac{2 + xz \sin(2xz) - e^{xy} (3x^2 + x^3 y) - 2xy \sec^2 y \tan x^2 y}{1 + xz \sin(2xz)} \right)$

หาค่าอนุพันธ์อันดับ 2 สำหรับฟังก์ชัน

กำหนด $z = 2/2542$ ตอนที่ 1 หาค่าอนุพันธ์

1. กำหนดให้ $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \ln(x \sin(yz)) + \tan(xy^2)$

หาค่า $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$

(35 ข้อ (164))

หาค่า $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (2z) + \left(\frac{1}{x \sin(yz)} (x \cos(yz)) (y) \right)$
 $= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y \cot(yz)$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = z \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (2y) + \cot(yz) + y (-\csc^2(yz)) (z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -yz (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \cot(yz) - yz \csc^2(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = (-yz) \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2x)$$

$$= \frac{3xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$



บทกลุ่ 2 ส่วนปริมาตร
ภาว 2/2512 มอ 1 ผศว 1

10. ที่จุดนี้

$$u^2 + 3v^2 = 2s - 3t^2 + 5$$

$$3u + 2v^3 = 5s^2 + 2t - 3$$

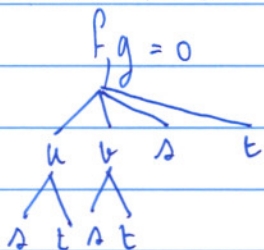
จงหา $\frac{\partial u}{\partial t}$ และ $\frac{\partial v}{\partial s}$ (350.1111)

พิจารณา $f(u, v, s, t) = u^2 + 3v^2 - 2s + 3t^2 - 5 = 0$

$g(u, v, s, t) = 3u + 2v^3 - 5s^2 - 2t + 3 = 0$

หาอนุพันธ์ของ f และ g เทียบกับ s และ t

หาอนุพันธ์ของ f และ g เทียบกับ u และ v



$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{J\left(\frac{f}{t}, \frac{g}{t}\right)}{J\left(\frac{f}{u}, \frac{g}{u}\right)}$$

$$\text{หรือ: } \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{J\left(\frac{f}{s}, \frac{g}{s}\right)}{J\left(\frac{f}{u}, \frac{g}{u}\right)}$$

$$\text{ดังนั้น } J\left(\frac{f}{u}, \frac{g}{u}\right) = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 6v \\ 3 & 6v^2 \end{vmatrix} = 12uv^2 - 18v$$

$$J\left(\frac{f}{t}, \frac{g}{t}\right) = \begin{vmatrix} f_t & f_v \\ g_t & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6t & 6v \\ -2 & 6v^2 \end{vmatrix} = 36tv^2 + 12v$$

$$J\left(\frac{f}{s}, \frac{g}{s}\right) = \begin{vmatrix} f_s & f_t \\ g_s & g_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2 \\ 3 & -10s \end{vmatrix} = -20us + 6$$

~~Handwritten signature and scribbles~~

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{(36tv^2 + 12v)}{(12uv^2 - 18v)} = - \frac{12v(3tv + 1)}{6v(2uv - 3)} = \frac{2(1 + 3tv)}{(3 - 2uv)}$$

$$\text{หรือ: } \frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{(-20us + 6)}{(12uv^2 - 18v)} = - \frac{2(-10us + 3)}{6v(2uv - 3)} = \frac{1(3 - 10us)}{3v(3 - 2uv)}$$