

แคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร

ภาคเรียนที่ 2/2549 ตอนที่ 2 เรื่องเวกเตอร์

1. ถ้า $\vec{u}(t) = (e^{2t}, \sin 2t, \cos^2 t)$ และ $\vec{v}(t) = (t^2, \ln t, \arctan t)$
แล้ว $2\vec{u}(0) \times 3\vec{v}(1) = \dots$

พิจารณา $\vec{u}(0) = (1, 0, 1)$ และ $\vec{v}(1) = (1, 0, \frac{\pi}{4})$

จะได้ว่า $2\vec{u}(0) \times 3\vec{v}(1) = (2 \times 3) (\vec{u}(0) \times \vec{v}(1))$

$$= 6 \left((1, 0, 1) \times (1, 0, \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$$

$$= 6 (0 - 0, 1 - \frac{\pi}{4}, 0 - 0)$$

$$= \frac{6}{4} (4 - \pi) \vec{j} = \frac{3}{2} (4 - \pi) \vec{j}$$

2. ถ้า $\vec{u}(t) = (e^{2t}, \sin 2t, \cos^2 t)$ และ $\vec{v}(t) = (t^2, \ln t, \arctan t)$
แล้ว $\vec{u}'(0) \cdot \vec{v}'(1) = \dots$

พิจารณา $\vec{u}'(t) = (2e^{2t}, 2\cos 2t, -2\cos t \sin t)$

$$\vec{u}'(0) = (2, 2, 0)$$

$$\text{และ } \vec{v}'(t) = (2t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1+t^2})$$

$$\vec{v}'(1) = (2, 1, \frac{1}{2})$$

จะได้ว่า $\vec{u}'(0) \cdot \vec{v}'(1) = (2, 2, 0) \cdot (2, 1, \frac{1}{2})$

$$= 4 + 2 + 0 = 6$$

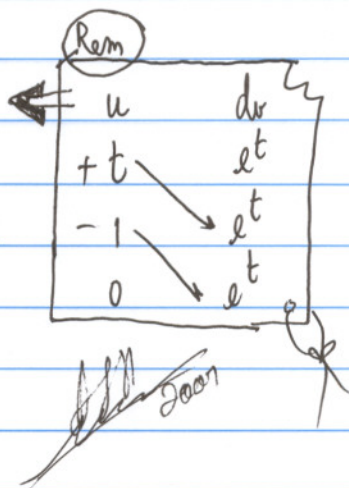
3. ถ้า $\vec{r}(t) = (t^2, t e^t, \frac{1}{1+t})$ แล้ว $\int_0^1 \vec{r}(t) dt = \dots$

พิจารณา $\int_0^1 \vec{r}(t) dt = (\int_0^1 t^2 dt, \int_0^1 t e^t dt, \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt)$

ซึ่ง $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}(t^3)|_0^1 = \frac{1}{3}$

$\int_0^1 t e^t dt = (t-1)e^t|_0^1 = 0 - (-1) = 1$

$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln|1+t||_0^1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$



ดังนั้น $\int_0^1 \vec{r}(t) dt = (\frac{1}{3}, 1, \ln 2)$

4. คำนวณค่าของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $r = 4 \cos 2\theta$ ที่จุด $\theta = \frac{3\pi}{4}$ มีค่าเท่ากับ...

พิจารณา คำนวณค่าของเส้นสัมผัสเส้นโค้งในรูปพิกัดขั้วคือ $\tan \angle$

โดยที่ $\tan \angle = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}$ เมื่อ $r' \cos \theta - r \sin \theta \neq 0$

ถ้า $r = 4 \cos 2\theta$ จะได้ $r' = -8 \sin 2\theta$

ถ้า $\theta = \frac{3\pi}{4}$ จะได้ $r = 4 \cos 2(\frac{3\pi}{4}) = 4 \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$r' = -8 \sin 2(\frac{3\pi}{4}) = -8 \sin \frac{3\pi}{2} = -8$

$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\tan \angle = \frac{(-8)(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 0(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(-8)(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 0(\frac{\sqrt{2}}{2})}$

$= -1$

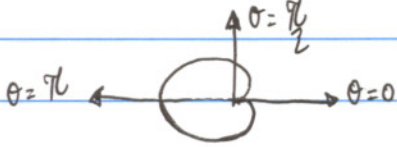
Sach 2007

แคลคูลัส 2 ชั้นเรียนพิเศษ

ภาควิชา 2/2549 ตอนที่ 2 วิชาคณิตศาสตร์

5. ความยาวเส้นรอบรูปของกราฟ $r = 2 - 2\cos\theta$ มีค่าเท่ากับ ...

พิจารณาความยาวเส้นรอบรูปของรูปหัวใจ $r = a - a\cos\theta$, $a > 0$
โดยที่ θ เปลี่ยนจาก 0 ถึง 2π



ความยาวเส้นรอบรูป $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta$
โดยที่ $r' = \frac{dr}{d\theta}$ และ $r = a - a\cos\theta$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sin\theta)^2 + (a - a\cos\theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2 - 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta} d\theta$$

$$= 2|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta} d\theta$$

$$= 2|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= 4|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= 4a \int_0^{2\pi} \left| \sin\frac{\theta}{4} \right| d\theta$$

$$= 4a \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{4} d\theta ; \text{ เมื่อ } \theta \in [0, 2\pi] \text{ จะได้ } \sin\frac{\theta}{4} \geq 0$$

$$= -8a \left(\cos\frac{\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -8a(0 - 1)$$

$$= 8a \quad \text{หน่วย}$$

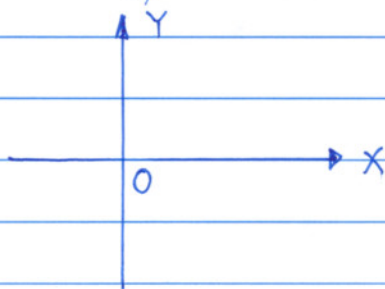
ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูป $r = 2 - 2\cos\theta$ มีค่าเท่ากับ $8(2) = 16$ หน่วย

done 2007

หาค่า 2 สมการ

ภาค 2/2549 มคอ 2 วิชาเอก: วิศวกรรม

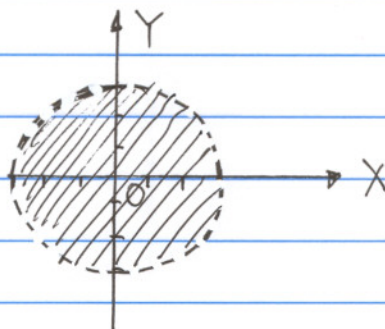
6. จงหาโดเมนนิยามของฟังก์ชัน $f(x,y) = \ln(9-x^2-y^2)$ บนระนาบ xy ที่กำหนดให้



พิจารณา จากโดเมนนิยามของฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} 9 - x^2 - y^2 &> 0 \\ x^2 + y^2 &< 9 \end{aligned}$$

ถ้า $x^2 + y^2 = 9$ จะได้ วงกลม ที่มี 3 หน่วย จากจุดศูนย์กลาง $(0,0)$
 เพราะ จากจุด $(0,0)$ แทนค่าในสมการ จะได้ $0^2 + 0^2 < 9$ เป็นจริง
 ดังนั้น นิยามโดเมนนิยามของฟังก์ชันที่กำหนดให้ นิยามบนวงกลมรัศมี 3 หน่วย



จบ

7. ถ้า $f(x,y) = \ln \frac{x}{y} + x e^{xy} + 2$ แล้ว $f_x(1,0) + f_y(0,1) = \dots$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } f(x,y) &= \ln(xy^{-1}) + x e^{xy} + 2 \\ f_x(x,y) &= \frac{1}{xy^{-1}} (y^{-1}) + e^{xy} + x(y e^{xy}) \end{aligned}$$

ถ้าให้ $f_x(1,0)$ หมายความว่าให้ y คงที่ไว้ก่อน

เมื่อ $(1,0) \notin D_f$ ดังนั้นจึงไม่สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ $(1,0)$ ได้

จบ

แบบฝึกหัด 2 ลำดับต่อลำดับ

การบ้าน 2/2549 ตอนที่ 2 เรื่องอนุพันธ์: วนวนวน

8. ถ้าหาว่า $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2) - \sin^2(xy) + y^2 e^{xyz}$ ถ้า $x=0, y=2, z=1$

หาค่า $\frac{\partial w}{\partial y} = \dots$

พิจารณา $\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) (2y) + \left(2y e^{xyz} + y^2 (e^{xyz})(x) \right)$

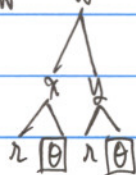
~~ผิด~~

ดังนั้น $\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{(0,2,1)} = \frac{2 \cdot 2}{0^2 + 2^2 + 1^2} + 2 \cdot 2 \cdot e^{0 \cdot 2} + 2^2 \cdot e^{0 \cdot 2} \cdot 0 = \frac{4}{5} + 4 = \frac{24}{5}$

9. ถ้าหาว่า $w = x^2 + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ถ้า $r=2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

หาค่า $\frac{\partial w}{\partial \theta} = \dots$

พิจารณาแบบทแยง w ดังนั้น $\frac{\partial w}{\partial \theta} = W_x X_\theta + W_y Y_\theta$



จาก $w = x^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ที่ $x^2 + y^2 = r^2$

$W_x = 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) (2x)$; $X_\theta = -r \sin \theta = -y$

$W_y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) (2y)$; $Y_\theta = r \cos \theta = x$

ดังนั้น $\frac{\partial w}{\partial \theta} = \left(2x + \frac{x}{r^2} \right) (-y) + \frac{y}{r^2} (x)$

ถ้า $r=2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ ดังนั้น $\frac{\partial w}{\partial \theta} = \left(2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2})$
 $= -4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -4$

10. ถ้าหาว่า: อนุพันธ์ของ f ถ้าให้จุดศูนย์กลางของ $\sqrt{(0.98)^2 + (2.01)^2 + (1.94)^2}$ คือ ...

พิจารณาให้ $w = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ดังนั้น $f(1, 2, 2) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

จาก $dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (2x) dx + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (2y) dy + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (2z) dz$

ให้ $dx = \Delta x = 0.98 - 1 = -0.02$; $dy = \Delta y = 2.01 - 2 = 0.01$; $dz = \Delta z = 1.94 - 2 = -0.06$

จะได้ว่า $dw \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Delta y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Delta z = \frac{(-0.02)}{3} + \frac{0.02}{3} + \frac{(-0.12)}{3}$

ดังนั้น $\sqrt{(0.98)^2 + (2.01)^2 + (1.94)^2} \approx 3 - 0.04 = 2.96$

~~ผิด~~